ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διάλεξη 8η ①

01/11/2018

Εξισώσεις Frenet:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= k\vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= -k\vec{t} + \tau\vec{b} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau\vec{n} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ είναι λύση του δ.ε. συστήματος

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Απόδειξη Θ.Θ. για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$:

① Θεωρώ το πρόβλημα (*) με αρχικές συνθήκες $x_1(s_0) = u_1$, $x_2(s_0) = u_2$, $x_3(s_0) = u_3$ όπου $\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι ορθοκανονική δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^3$.

Με αυτές τις αρχικές συνθήκες υπάρχει μοναδική λύση $\{x_1(s), x_2(s), x_3(s)\}$, $s \in I$

Ισχυρισμός: $\{x_1(s), x_2(s), x_3(s)\}$ είναι ορθοκ. δεξιόστροφη βάση $\forall s \in I$. Ορίζω την $f_{ij}(s) = \langle x_i(s), x_j(s) \rangle$,

$f_{ij}(s_0) = \langle x_i(s_0), x_j(s_0) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\dot{f}_{ij}(s) = \langle \dot{x}_i(s), x_j(s) \rangle + \langle x_i(s), \dot{x}_j(s) \rangle$$

$$\Rightarrow \dot{f}_{ij}(s) = \langle \sum_k a_{ik}(s) x_k(s), x_j(s) \rangle + \langle x_i(s), \sum_k a_{jk}(s) x_k(s) \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{f}_{ij}(s) = \sum a_{ik}(s) f_{kj}(s) + \sum_k a_{jk}(s) f_{ik}(s)} \quad (**)$$

Επειδή ο $(a_{ij}(s))$ είναι αντισυμ. διαπιστώνω ότι οι συναρτήσεις δ_{ij} είναι λύσεις του (**)

Λόγω της μοναδικότητας της, λύση έχω: $f_{ij}(s) = \delta_{ij}$

Για νδο $\{x_1(s), x_2(s), x_3(s)\}$ είναι δεξιόστροφη, αρκεί 9
νδο $[x_1(s), x_2(s), x_3(s)] = 1, \forall s \in I$

$$\frac{d}{ds}\left([x_1(s), x_2(s), x_3(s)]\right) = [\dot{x}_1(s), x_2(s), x_3(s)] +$$
$$[x_1(s), \cancel{\dot{x}_2(s)}^{\to 0}, x_3(s)] + [x_1(s), \cancel{x_2(s)}^{\to 0}, \dot{x}_3(s)]$$

$$= [k(s)x_2(s), \cancel{x_2(s)}^{\to 0}, x_3(s)] + 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow [x_1(s), x_2(s), x_3(s)] =$ σταθ. και αφού

$[x_1(s_0), x_2(s_0), x_3(s_0)] = 1 \Rightarrow \forall s \in I$ $\{x_1(s), x_2(s), x_3(s)\}$

είναι δεξιόστροφη βάση.

Ορίζω την καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$c(s) = \int_{s_0}^{s} x_1(u)\,du, \quad \frac{d\dot{c}(s)}{ds} = x_1(s) \Rightarrow \left\|\frac{dc(s)}{ds}\right\| = 1.$$

$$\Rightarrow \dot{c}(s) = x_1(s) \Rightarrow \vec{t}(s) = x_1(s)$$

$$\dot{\vec{t}} = \dot{x}_1 = k x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\dot{\vec{t}}}{k} = \vec{n}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = x_1 \times x_2 = x_3.$$

11 <u>Παρατήρηση:</u> $A \in O(3)$, $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$

$$[Av_1, Av_2, Av_3] = \det A\,[v_1, v_2, v_3] \Leftrightarrow$$

$$\langle Av_1 \times Av_2, Av_3\rangle = \pm 1 \langle v_1 \times v_2, v_3\rangle = \pm\langle A(v_1 \times v_2), Av_3\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \underbrace{Av_1 \times Av_2 - (\pm 1) A(v_1 \times v_2)}, Av_3\rangle = 0, \ \forall v_3$$

$$\boxed{Av_1 \times Av_2 = (\pm 1) A(v_1 \times v_2), \ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3, \ \forall A \in O(3)}$$

Για να αποδ. το σκέλος της μοναδικότητας θα χρησιμοποιήσω την παρακάτω παρατήρηση.

Για $s_0 \in I$: $\{\vec{t}(s_0), \vec{n}(s_0), \vec{b}(s_0)\}$ πλαίσιο Frenet της c στο s_0. και

$\{\tilde{\vec{t}}(s_0), \tilde{\vec{n}}(s_0), \tilde{\vec{b}}(s_0)\}$ πλαίσιο Frenet της $\tilde{c}$ στο s_0.

Υπάρχει $A \in O(3)$ ώστε $A\tilde{\vec{t}}(s_0) = \vec{t}(s_0)$, $A\tilde{\vec{n}}(s_0) = \vec{n}(s_0)$, $A\tilde{\vec{b}}(s_0) = \vec{b}(s_0)$

Προφανώς $\det A = \pm 1$. Θεωρώ $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $T = T_v \circ A \circ T_w$

$$v = c(s_0), \quad w = -\tilde{c}(s_0)$$

Θεωρώ τώρα την καμπύλη $\bar{c} = T \circ \tilde{c}$, $\bar{k} = \tilde{k} = k$, $\bar{\tau} = \tilde{\tau} = \tau$

Η c έχει πλαίσιο Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$
Η $\bar{c}$ έχει πλαίσιο Frenet $\{\bar{\vec{t}}(s), \bar{\vec{n}}(s), \bar{\vec{b}}(s)\}$
είναι λύσεις του ίδιου προβλήματος (***)

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \quad (***)$$

$$\bar{c}(s_0) = T_v \circ A \circ T_w \, \tilde{c}(s_0) = T_v(A(\underbrace{w + \tilde{c}(s_0)}_{0})) = T_v 0 = v + 0 = c(s_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{c}(s_0) = c(s_0)}$$

$$\bar{\vec{t}}(s_0) = \dot{\bar{c}}(s_0) = A\dot{\tilde{c}}(s_0) = A\tilde{\vec{t}}(s_0) = \vec{t}(s_0)$$

$$\boxed{\bar{\vec{n}}(s_0) = \frac{\dot{\bar{t}}(s_0)}{\bar{k}(s_0)} = \vec{n}(s_0)}, \quad \boxed{\bar{\vec{b}}(s_0) = \vec{b}(s_0)}$$

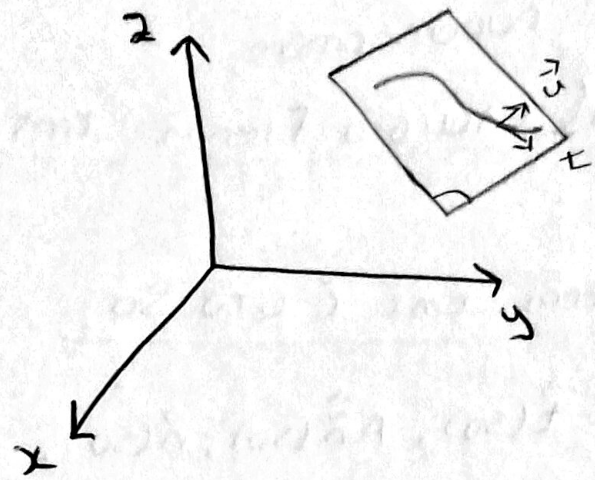
$$\Rightarrow \boxed{\bar{\vec{t}}(s_0) = \vec{t}(s_0)} \quad \Rightarrow \dot{\bar{c}}(s) = \dot{c}(s), \forall s \xRightarrow{\bar{c}(s_0) = c(s_0)}$$

$$T \circ \tilde{c} = c$$

—ΤΕΛΟΣ—

Παρατηρήσεις:

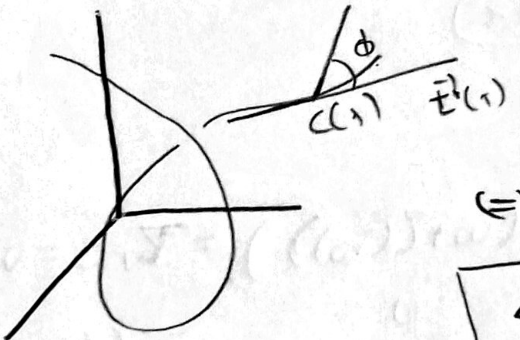
A)



Ορισμός: Μια (κανονική) καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^3$ λέγεται καμπύλη σταθερής κλίσης αν-ν $\exists$ μοναδιαίο διάνυσμα ω το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία ϕ με κάθε εφαπτόμενη ευθεία της c.

ω = διεύθυνση της καμπύλης σταθερής κλίσης

ϕ = γωνία της καμπύλης σταθερού κλίσης.



c είναι σταθ. κλίσης

$\Leftrightarrow \measuredangle(\vec{t}(s), \omega) = \phi$

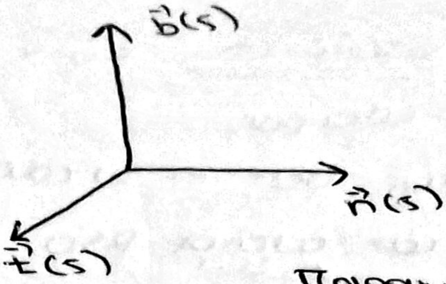
$\Leftrightarrow \cos \measuredangle(\vec{t}(s), \omega) = \cos\phi \Leftrightarrow$

$$\boxed{\langle \vec{t}(s), \omega \rangle = \cos\phi \ , \forall s \in I.}$$

$$\langle \vec{t}(s), \omega \rangle^{\bullet} = 0 \Rightarrow \boxed{\langle \dot{\vec{t}}(s), \omega \rangle = 0}$$

$$\Rightarrow \langle \kappa(s) \vec{n}(s), \omega \rangle = 0 \Leftrightarrow \kappa(s) \langle \vec{n}(s), \omega \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{n}(s), \omega \rangle = 0 \ , \forall s \in I.}$$



$$\omega = \langle \omega, \vec{t}(s)\rangle \vec{t}(s) + \langle \omega, \vec{n}(s)\rangle \vec{n}(s) + \langle \omega, \vec{b}(s)\rangle \vec{b}(s)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega = \cos\phi\, \vec{t}(s) + \sin\phi\, \vec{b}(s), \ \forall s\in I}$$

Παραγωγίζω και λαμβάνω: $0 = \cos\phi\, \vec{t}'(s) + \sin\phi\, \vec{b}'(s)$

$$\Leftrightarrow 0 = \cos\phi\, \kappa(s)\vec{n}(s) - \sin\phi\, \tau(s)\vec{n}(s)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\cos\phi\, \kappa(s) - \sin\phi\, \tau(s))\, \vec{n}(s)$$

$$\Leftrightarrow \cos\phi\, \kappa(s) = \sin\phi\, \tau(s) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{\tau}{\kappa} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\tau}{\kappa} = \cot\phi}$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Αν c σταθερή κλίση με γωνία ϕ, τότε

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\phi.$$

Το αντίστροφο ισχύει; Αν $\frac{\tau}{\kappa}$ = σταθ. τότε είναι η c σταθ. κλίσης;

↳ <u>Απόδ.</u>: Υποθέτω $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\phi$. Θεωρώ την διανυσματική συνάρτηση $\omega: I \to \mathbb{R}^3$, με $\omega(s) = \cos\phi\, \vec{t}(s) + \sin\phi\, \vec{b}(s)$.

Τότε: $\dot{\omega}(s) = \cos\phi\, \vec{t}'(s) + \sin\phi\, \vec{b}'(s) = \underbrace{(\cos\phi\, \kappa(s) - \sin\phi\, \tau(s))}_{=0}\vec{n}(s)$

Άρα $\omega(s)$ = σταθ $= \omega$ και $\omega = \cos\phi\, \vec{t}(s) + \sin\phi\, \vec{b}(s)$.

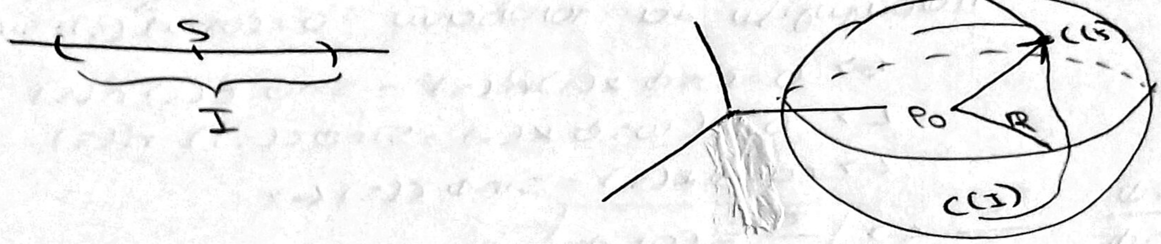
σύμβολο γωνίας: $\measuredangle$

$\|\omega\| = 1$, $\cos \measuredangle(\vec{t}(s), \omega) = \dfrac{\langle \vec{t}(s), \omega\rangle}{\|\vec{t}(s)\|\|\omega\|} = \cos\phi \Rightarrow$

$$\boxed{\measuredangle(\vec{t}(s), \omega) = \phi}$$

Ορισμός: Μια καμπύλη καλείται σφαιρική αν-ν η εικόνα της περιέχεται σε σφαίρα.

▶ Έστω ότι $c: I \to \mathbb{R}^3$ είναι σφαιρική και η εικόνα της περιέχεται σε σφαίρα κέντρου P_0 και ακτίνας $R>0$.



$\cancel{k(s)=\|\ddot{c}(s)\|}$

$$d(c(s),P_0)=R,\ \forall s\in I \Leftrightarrow \|c(s)-P_0\|=R \Leftrightarrow$$
$$\boxed{\langle c(s)-P_0,\ c(s)-P_0\rangle = R^2,\ \forall s\in I}$$

παραγωγίζω $\boxed{\langle c(s)-P_0,\ \dot{c}(s)\rangle = 0} \Rightarrow$

$$\langle \dot{c}(s),\dot{c}(s)\rangle + \langle c(s)-P_0,\ \ddot{c}(s)\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\boxed{\langle c(s)-P_0,\ \ddot{c}(s)\rangle = -1,\ \forall s\in I.}$$

Παρατήρηση: Οι κανονικές σφαιρικές καμπύλες έχουν παντού θετική καμπυλότητα.

$$\langle c(s)-P_0,\ \vec{t}(s)\rangle = 0,\ \forall s$$

Άρα ισχύει $c(s)-P_0 = \langle c(s)-P_0,\ \vec{n}(s)\rangle\, \vec{n}(s) + \langle c(s)-P_0,\ \vec{b}(s)\rangle\, \vec{b}(s).$

$$\Rightarrow R^2 = \langle c(s)-P_0,\ \vec{n}(s)\rangle^2 + \langle c(s)-P_0,\ \vec{b}(s)\rangle^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\langle c(s)-P_0,\ \vec{n}(s)\rangle}{R}\right)^2 + \left(\frac{\langle c(s)-P_0,\ \vec{b}(s)\rangle}{R}\right)^2 = 1.$$

Άρα υπάρχει λεία γνησιοτική συνάρτηση $\omega: I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\begin{cases} \langle c(s)-p_0, \vec{n}(s)\rangle = R\cos\omega(s) \\ \langle c(s)-p_0, \vec{b}(s)\rangle = R\sin\omega(s) \end{cases}$

$$\boxed{c(s)-p_0 = R\left(\cos\omega(s)\,\vec{n}(s)+\sin\omega(s)\,\vec{b}(s)\right)} \quad (1)$$

$$\langle c(s)-p_0, \vec{t}(s)\rangle = -1 \Rightarrow k(s)\langle c(s)-p_0, \vec{n}(s)\rangle = -1$$

$$k(s)R\cos\omega(s) = -1 \Rightarrow \boxed{k(s) = -\frac{1}{R\cos\omega(s)}}$$

Συνέπεια: Αν μια καμπύλη περιέχεται (η εικόνα της) σε σφαίρα ακτίνας $R>0$, τότε ισχύει ότι $k \geq \frac{1}{R}$

Θα παραγωγίσω την (1) και θα προκύψει

$$\vec{t}(s) = R\left\{-\dot\omega(s)\sin\omega(s)\vec{n}(s)+\cos\omega(s)\left(-k(s)\vec{t}(s)+\tau(s)\vec{b}(s)\right) + \dot\omega(s)\cos\omega(s)\vec{b}(s) - \sin\omega(s)\,\tau(s)\,\vec{n}(s)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \vec{t}(s) = R\left\{-k(s)\cos\omega(s)\vec{t}(s) + \left(-\sin\omega(s)\left(\dot\omega(s)+\tau(s)\right)\right)\vec{n}(s) + \cos\omega(s)\left(\dot\omega(s)+\tau(s)\right)\vec{b}(s)\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -Rk(s)\cos\omega(s) \\ 0 = -R\sin\omega(s)\left(\dot\omega(s)+\tau(s)\right) \\ 0 = R\cos\omega(s)\left(\dot\omega(s)+\tau(s)\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tau(s) = -\dot\omega(s)}$$

Πρόταση: Οι μόνες σφαιρικές καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα είναι κύκλος (ή τόξο κύκλου)

Έχω ότι $\kappa(s) = -\dfrac{1}{R\cos w} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\kappa} = -R\cos w \Rightarrow -\frac{\dot\kappa}{\kappa^2} = R\dot w \sin w \overset{\dot w = -\tau}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\dot\kappa}{\kappa^2} = R\tau \sin w \overset{\tau \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau} = R\sin w}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} = R\dot w\cos w = -\tau R\cos w \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{\kappa}$$

Συμπέρασμα: Αν c σφαιρική καμπύλη με $\tau(s) \neq 0,\ \forall s \in I$ τότε: $\left(\dfrac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} = \dfrac{\tau}{\kappa}$

Ερώτηση: Το αντίστροφο ισχύει;

Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο s, καμπυλότητα $\kappa(s) > 0,\ \forall s \in I$ και στρέψη $\tau(s) \neq 0,\ \forall s \in I$.

Υποθέτω ότι $\left(\dfrac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} = \dfrac{\tau}{\kappa}$

$$c(s) - P_0 = -\frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s) + \frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}(s)\,\vec{b}(s)$$

$$P_0 = c(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s) - \frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}(s)\,\vec{b}(s)$$

Θεωρώ την διαν. συνάρτηση: $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$a = c + \frac{1}{k}\vec{n} - \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\vec{b}$$

$$\dot{a} = \vec{t} - \frac{\dot{k}}{k^2}\vec{n} + \frac{1}{k}(-k\vec{t} + \tau\vec{b}) - \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot}\vec{b} + \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\tau\vec{n}$$

$\dot{a} = 0 \Rightarrow a(s) = P_0$

$$P_0 = c + \frac{1}{k}\vec{n} - \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\vec{b} \Rightarrow \boxed{c - P_0 = -\frac{1}{k}\vec{n} + \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\vec{b}}$$

$$\|c - P_0\|^2 = \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2 + \frac{1}{k^2}$$

Το παραγωγίζω και: $2\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} - 2\frac{\dot{k}}{k^3} =$

$$= \frac{2\dot{k}}{k^2\tau}\,\frac{\tau}{k} - \frac{2\dot{k}}{k^3} = 0.$$

Θεώρημα: Ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε μια κανονική καμπύλη με φυσική παράμετρο καμπυλότητας $k(s) > 0, \forall s \in I$, στρέψη $\tau(s) \neq 0\ \forall s \in I$ είναι η:

$$\boxed{\left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{k}}$$

Σχόλιο: Μια καμπύλη καλείται κλειστή αν-ν είναι περιοδική, δηλαδή $\exists c > 0$ τ.ω. $c(s + c) = c(s), \forall s$.

$$\vec{t}(s + c) = \vec{t}(s), \forall s.$$

(*) $\kappa(s+c) = \kappa(s) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\omega(s+c) = \cos\omega(s) \\ \sin(\omega+c) = \sin\omega(s) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\omega(s+l) = \omega(s) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$

$\omega(l) = \omega(0) + 2l\pi \Rightarrow l = 0$

$$\int_0^l \tau(s)ds = -\int_0^l \omega(s)ds = \omega(0) - \omega(l)$$

Κλειστή + σφαιρική $\Rightarrow \int_0^l \tau(s)ds = 0$

<u>Έννοια</u>: ολ.γ.: τετρ. μορφές
ιδιοτ. - ιδιοσ.

Ανάλυση: ανάλυση
Τοπολογία: ανοιχτά + κλειστά + συνεκτ.